DM TS

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2) a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) On considère l'algorithme suivant :

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$. Les valeurs de u seront arrondies à 10^{-4}. Conjecturer alors le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Variables : n entier naturel
u réel positif
Entrées et initialisation
Lire n
$2 \to u$
Traitement et sorties
pour i variant de 1 à n **faire**
$\dfrac{1+0.5u}{0.5+u} \to u$
Afficher u
fin

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u									

2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   b) montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).