Exercices suites T ES

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 150$ et pour totu entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8{\cdot}u_n + 45$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Voici deux proposition d'algorithmes :

```
Variables :
N est un entier naturel
U est un nombre réel.
Initialisation :
U prend la valeur 150
N prend la valeur 0
Traitement :
Tant que U ⩾ 220
U prend la valeur 0,8×U+45
N prend la valeur N+1
Fin Tant que
Sortie :
Afficher N
```

Algorithme 1

```
Variables :
N est un entier naturel
U est un nombre réel.
Initialisation :
U prend la valeur 150
N prend la valeur 0
Traitement :
Tant que U < 220
U prend la valeur 0,8×U+45
N prend la valeur N+1
Fin Tant que
Sortie :
Afficher N
```

Algorithme 2

a. Un seul de ces algorithmes permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$.
Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

b. Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme choisi à la question précédente ?

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$v_n = u_n - 225$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

b. En déduire que pour tout entier naturel n :
$u_n = 225 - 75{\times}0{,}8^n$

4. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.

On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

- 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;
- 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.

La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250.

Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ? Justifier la réponse.

Exercice 2

Une grande universié, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire *(entre le 1er septembre et le 30 juin)* ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016 + n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. a. Estimer le nombre d'étudiants en Juin 2017.

   b. Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} = 1{,}04{\cdot}u_n - 156$

3. Recopier et compléter les lignes ℓ.5, ℓ.6, ℓ.7 et ℓ.9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
     Variables
ℓ.1      n est un nombre entier naturel
ℓ.2      U est un nombre réel
     Traitement
ℓ.3      n prend la valeur 0
ℓ.4      U prend la valeur 27 500
ℓ.5      Tant que U ⩽ ... faire
ℓ.6         n prend la valeur ...
ℓ.7         U prend la valeur ...
ℓ.8      Fin Tant que
     Sortie
ℓ.9      Afficher ...
```

4. a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Intialisation	Etape 1	...
Valeur de n	0	...	...
Valeur de U	27 500	...	...

   b. Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $u_n = 23\,600{\times}1{,}04^n + 3\,9000$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interpétation dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : L'accord de Kyoto (1997)

Le principal gaz à effet de serre (GES) est le dioxyde de carbone, noté CO_2.
En 2011, la France a émis 486 mégatonnes de GES en équivalent CO_2 contre 559 mégatonnes en 1990.

1. Dans l'accord de Kyoto, la France s'est engagée à réduire ses GES de 8 % entre 1990 et 2012.
Peut-on dire qu'en 2011 la France respectait déjà cet engagement ? Justifier la réponse.

2. Sachant que les émissions de 2011 ont marqué une baisse de 5,6 % par rapport à 2010, calculer le nombre de mégatonnes en équivalent CO_2 émises par la France en 2010. Arrondir le résultat à 0,1.

Partie B : Etude des émissions de gaz à effet de serre d'une zone industrielle

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduissent à une rédution des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent DO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005+n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n,on a :
$u_{n+1} = 0{,}98\times u_n + 0{,}2$.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel, par : $v_n = u_n - 10$

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 31\times(0{,}98)^n + 10$.

4. a. Calculer la limite de la suite (u_n).

   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.

   a. Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme.

```
1  Variables
2      U est du type nombre
3      n est du type nombre entier
4  Début Algorithme
5      U prend la valeur 41
6      n prend la valeur 0
7      Tant que (......) faire
8          Début Tant que
9              U prend la valeur ...
10             n prend la valeur n+1
11         Fin Tant que
12     Afficher n
13 Fin Algorithme
```

   b. L'algorithme affiche 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice

Exercice 4

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de $120\,m^2$ au 1er janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de $4\,m^2$.

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1er janvier de l'année $2017+n$.

La suite (u_n) est donc définie par $u_0 = 120$ et, pour tout entier naturel n, par :
$u_{n+1} = 0{,}9\cdot u_n + 4$

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1er janvier de l'année 2017.

   Recopier et compléter les lignes ℓ.1, ℓ.3, ℓ.4 et ℓ.7 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.

   On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme

```
ℓ.1  U prend la valeur ...
ℓ.2  N prend la valeur 0
ℓ.3  Tant que ...
ℓ.4      U prend la valeur ...
ℓ.5      N prend la valeur N+1
ℓ.6  Fin tant que
ℓ.7  Afficher ...
```

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 40$

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et préciser le premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

   c. Justifier que $u_n = 80\times0{,}9^n + 40$ pour tout entier naturel n.

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
$80\times0{,}9^n + 40 \leqslant 60$

   b. En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier de l'année 2017.

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complétement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

Exercice 5

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont tells qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de $4\,\%$ de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de $2\,m^3$ d'eau par jour.
Le premier jour de la mise en fonctionnnement du système automatique de remplissage, la piscine contient $75\,m^3$.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
Ainsi, $u_0 = 75$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique. Est-elle géométrique ?

3. Justifier que, pour tout entier naturel n :
   $u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 2$

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 50$
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}96$ et de premier terme v_0.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n :
   $u_n = 25 \times 0{,}96^n + 50$
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à $65\,m^3$, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

Variables :	
n est un nombre entier naturel	$\ell.1$
u est un nombre réel	$\ell.2$
Traitement :	
n prend la valeur 0	$\ell.3$
u prend la valeur 75	$\ell.4$
Tant que u ...	$\ell.5$
u prend la valeur ...	$\ell.6$
n prend la valeur $n+1$	$\ell.7$
Fin Tant que	$\ell.8$
Sortie :	
Afficher n	$\ell.9$

   a. Recopier et compléter les lignes $\ell.5$ et $\ell.6$ de cet algorithme.
   b. Quel est le résultat affiché en sortie de cet algorithme ?
   c. Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

Exercice 6

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectare sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de $0{,}4\,\%$. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = 0{,}996 \times u_n + 7{,}2$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, u_n permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015+n$.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calculer et affiche la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

Variables :
N est un entier naturel
U est un nombre réel
Initialisation :
Affecter à N la valeur 2015
Affecter à U la valeur 4 000
Traitement :
Sortie :
Afficher N

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
   $v_n = u_n - 1\,800$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 2200 \times 0{,}996^n + 1800$
   c. Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître ? Justifier la réponse.

4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 millions d'arbres en 10 ans.

   En 2016, on estime que le nombre d'arbres plantées par l'Organisation des Nations Unies (ONU) est de 7,3 milliards.

   On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de $10\,\%$. L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 millions d'arbres de 2016 à 2025 ?