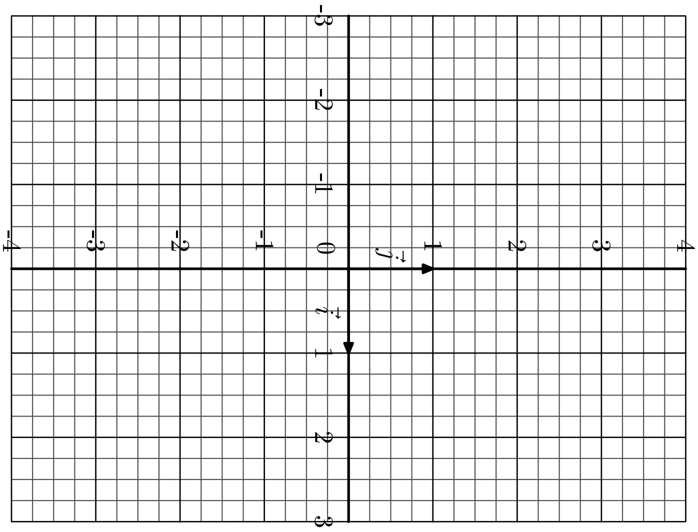
Exercice 1

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etablir le tableau de variation de la fonction f.
3. Préciser les différentes asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exercice 2

Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction f.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que la fonction f' admet pour expression :
$$f'(x) = -\frac{e^x \cdot \big(e^{2x} - 4 \cdot e^x + 1\big)}{\big(e^{2x} - e^x + 1\big)^2}$$
3. a. Etudier le signe du polynôme $x^2 - 4x + 1$.

   b. En déduire que la fonction f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On précisera les valeurs de a et de b.
4. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

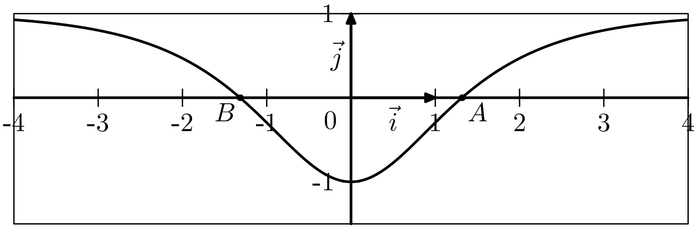
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f. On y précisera les valeurs approchées de $f(a)$ et de $f(b)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - \dfrac{4 \cdot e^x}{e^{2 \cdot x} + 1}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.

   a. Vérifier que pour tout réel x :
$$f'(x) = \frac{4 \cdot e^x \cdot \big(e^{2 \cdot x} - 1\big)}{\big(e^{2 \cdot x} + 1\big)^2}$$

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$
2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
Démontrer que cette conjecture est vraie.
`(Question hors programme 2012)`
3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

   a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation :
$$x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0$$
En déduire la valeur exacte de a.

   b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

