Exercice 1

1. a. Résoudre chacune des inéquations suivantes :
$3x+1>0 \quad ; \quad -x+2>0$

   b. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g :
$f(x)=\ln(3x+1) \quad ; \quad g(x)=\ln(-x+2)$

2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

   a. $h(x)=\ln x^2$
   d. $j(x)=\ln\left(e^x-1\right)$
   e. $k(x)=\ln\left(e^x-e^{-x}\right)$
   f. $\ell(x)=\dfrac{1}{\ln(x)-1}$

Exercice 2

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln 2$:

a. $\ln(4)$
b. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
c. $\ln(6)-\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$
d. $\ln\left(2{\cdot}e^2\right)$
e. $\ln\left(\dfrac{2}{e^3}\right)$
f. $\ln\left(\sqrt{e^5}\right)$

Exercice 3

Etablir les égalités suivantes :

a. $\ln\left(16\right)+\ln\left(4\right)=6{\cdot}\ln 2$
b. $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right)=-\ln\left(\dfrac{5}{7}\right)$
c. $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)-\ln\left(\dfrac{9}{8}\right)=\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$
d. $\dfrac{\ln\left(\sqrt{8}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}=3$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Sur $\mathbb{R}$, établir l'identitié : $f(x)=x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$
3. En déduire que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5

Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre :

a. $\ln(5x+1)=\ln(x-1)$
b. $2{\cdot}\ln(3-x)=\ln(2)$
c. $\ln(3x+1)=5$
d. $3{\cdot}e^{2x-1}=2$
e. $\left(\ln x\right)^2-\ln x-2=0$
f. $e^{2x}+4{\cdot}e^x-1=0$

Exercice 6

1. Résoudre dans $\left]-1\,;+\infty\right[$, l'inéquation :
(E): $\quad \ln(x+1)\leqslant\ln\left(x^2+1\right)$

2. Résoudre dans $\left]-3\,;2\right[$, l'inéquation :
(F): $\quad \ln(4-2x)<\ln(x+3)$

Exercice 7

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules :
75 % de particules A et 25 % de particules de B.

Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0{,}75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a :
$p(t)=0{,}75{\cdot}e^{-\lambda\cdot t}$ où λ est une constante réelle.

La demi-vie des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B *(on arrondi à l'unité)*.

Exercice 8

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, les inéquations suivantes :

a. $5^n\geqslant 2$
b. $0{,}1^n\geqslant 2$
c. $\left(\ln 2\right)^n<e^2$
d. $\ln\left(2^n\right)-\ln\left(3^n\right)\leqslant 2$

Exercice 9

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} 2{\cdot}\ln x+x$
b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-3^+} \ln(x+3)-3{\cdot}x$
c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} \ln(x)-\frac{1}{x}$
d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \ln\left(e^x+1\right)$
e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} e^{-2\cdot\ln x+1}$
f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \ln\left(x^2-x\right)$

Exercice 10

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x)=x{\cdot}\ln x$
b. $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x^2+1}$
c. $h(x)=\ln\left(\sqrt{1-x}\right)$
d. $j(x)=\ln\left(e^x-1\right)$

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ par :
$f(x)=x-\dfrac{\ln(x)}{x}$

1. Soit g la fonction définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ par :
$g(x)=x^2-1+\ln(x)$
Montrer que la fonction g est positive sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $\left[1\,;+\infty\right[$:
$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

   b. En déduire le sens de variation de f sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

Exercice 12

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par : $g(x)=2x^3-1+2{\cdot}\ln x$

1. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$. On prendra comme unités : $2\,cm$ sur l'axe des abscisses et $1\,cm$ sur l'axe des ordonnées.